§ 10. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения Лагранжа (41) представляют собой n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для обобщенных координат q_i. Эти уравнения многими способами можно свести к системе $2n$ уравнений первого порядка путем введения новых переменных. Канонические уравнения или уравнения Гамильтона дают такую систему дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентную уравнениям Лагранжа, в наиболее удобной симметричной форме.

Получим уравнения Гамильтона. Для этого введем в качестве дополнительных к q_i независимых переменных систему обобщенных импульсов:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{44}$$

где $L=T+U=T-\Pi$ — функция Лагранжа, представляющая собой избыток кинетической энергии над потенциальной. Определим новую функцию, которая называется функцией Гамильтона:

$$H=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-L. \tag{45}$$

Можно показать, что функция Гамильтона для случаев, когда кинетическая энергия является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей, т. е.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

и силовая функция не зависит от обобщенных скоростей и явно от t, совпадает с полной механической энергией:

$$E=T+\Pi.$$

Для других случаев функция Гамильтона является лишь неким аналогом полной механической энергии.

Для вывода уравнений Гамильтона вычислим вариацию функции H, используя ее определение (45) и учитывая, что время при этом не варьируется. Так как $L=L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)$, то получаем

$$\delta H=\sum_i p_i\delta\dot{q}_i+\sum_i \dot{q}_i\delta p_i-\delta L;$$

$$\delta L=\sum_i\frac{\partial L}{\delta\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_i p_i\delta\dot{q}_i+\sum_i\dot{p}_i\delta q_i. \tag{46}$$

При этом учтено, что, согласно определению p_i и уравнениям Лагранжа, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=p_i;\quad \frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_i.$$

С учетом значения δL выражение для δH принимает форму

$$\delta H=\sum_i p_i\delta\dot{q}_i+\sum_i\dot{q}_i\delta p_i-\sum_i p_i\delta\dot{q}_i-\sum_i\dot{p}_i\delta q_i=\sum_i\dot{q}_i\delta p_i-\sum_i\dot{p}_i\delta q_i, \tag{47}$$

так как первое и третье слагаемые в сумме дают нуль.

С другой стороны, H есть функция новых переменных q_i, p_i и, возможно, времени t, т. е.

$$H=H(q_i,\ p_i,\ t).$$

Поэтому для ее вариации, выраженной через эти переменные, имеем

$$\delta H=\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{48}$$

Приравнивая значения δH из (47) и (48) и учитывая, что q_i, p_i независимы и, следовательно, их вариации независимы и произвольны, получаем следующие уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i};\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i};\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{49}$$

Уравнения Гамильтона служат для определения $q_i(t)$ и $p_i(t)$, если для них дополнительно заданы начальные условия, по которым можно определить постоянные интегрирования.

Уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа имеют ряд преимуществ. Для них разработаны методы нахождения интегралов. Формализм Гамильтона широко применяется в квантовой и статистической механике.

Пример. Составить уравнения Гамильтона и проинтегрировать их для системы с одной степенью свободы, для которой кинетическая и потенциальная энергия выражаются в форме

$$T=a\frac{\dot{q}^2}{2},\quad \Pi=c\frac{q^2}{2}, \tag{а}$$

где a и c — постоянные положительные величины.

Решение. Вычисляем функцию Лагранжа. Имеем

$$L=T+U=T-\Pi=\frac{a\dot{q}^2}{2}-\frac{cq^2}{2}.$$

Определяем обобщенный импульс p. Получаем

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}=a\dot{q}, \tag{б}$$

так как Π не зависит от обобщенной скорости.

Для функции Гамильтона, согласно ее определению, используя (б), имеем

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=p\dot{q}-a\frac{\dot{q}^2}{2}+c\frac{q^2}{2}=\frac{a\dot{q}^2}{2}+\frac{cq^2}{2}=T+\Pi=E, \tag{в}$$

т. е. в рассматриваемом случае функция Гамильтона H равна полной механической энергии E.

Для составления уравнений Гамильтона выразим функцию H через переменные q и p, используя (б). Получим

$$H=\frac{a\dot{q}^2}{2}+\frac{cq^2}{2}=\frac{p^2}{2a}+\frac{cq^2}{2}. \tag{г}$$

Из (г) путем дифференцирования имеем

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{a};\quad \frac{\partial H}{\partial q}=cq.$$

Подставляя эти значения производных в уравнения Гамильтона

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p};\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{д}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\dot{q}=\frac{p}{a},\quad \dot{p}=-cq. \tag{д$'$}$$

Из системы уравнений Гамильтона (д′) путем дифференцирования первого уравнения по времени и подстановки $\dot{p}$ в полученное выражение из второго уравнения получим дифференциальное уравнение для определения q:

$$\ddot{q}+k^2q=0, \tag{е}$$

где $k^2=\dfrac{c}{a}$.

Решение (е) можно представить в двух эквивалентных формах:

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt, \tag{ж}$$

или

$$q=A\sin(kt+\alpha), \tag{ж$'$}$$

где C_1, C_2, A, α — постоянные величины, определяемые по начальным значениям для q.

Вычисляя $\dot{q}$ и подставляя его значение в первое уравнение (д′), имеем

$$p=a\dot{q}=ak(-C_1\sin kt+C_2\cos kt)=akA\cos(kt+\alpha). \tag{з}$$

Получены решения уравнений Гамильтона (д′).